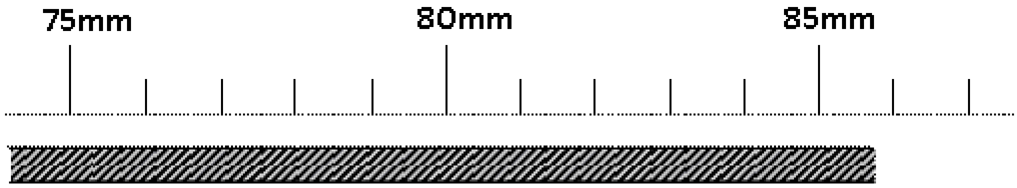
Μετρήσεις και Σφάλματα/Measurements and Uncertainties

Κατά την καταγραφή δεδομένων, σε κάθε εγγραφή δεδομένου θα πρέπει να δίδεται μαζί και το αντίστοιχο εκτιμώμενο σφάλμα ή αβεβαιότητα. Ο όρος σφάλμα ή αβεβαιότητα χρησιμοποιείται στις επιστήμες για να εκφράσουμε πόσο κοντά μια μέτρηση μας αντιπροσωπεύει την πραγματική τιμή της ποσότητα που μετράμε.

Χρησιμοποιήστε την ακόλουθη μέθοδο για να εκτιμήσετε το σφάλμα ή την αβεβαιότητα που σχετίζεται με οποιαδήποτε μέτρηση στο εργαστήριο.

Πρώτον, βρείτε τη σταθερά της κλίμακας, δηλ. την μικρότερη υποδιαίρεση του οργάνου μέτρησης. Στο υποδεκάμετρο ή στο μέτρο μήκους του εργαστηρίου, η μικρότερη υποδιαίρεση είναι 1 mm. Στη ζυγαριά ακριβείας του εργαστηρίου, η μικρότερη υποδιαίρεση είναι 0,01 g. Αν στηρίζεστε μόνο στην ακρίβεια του οργάνου μέτρησης, θα ήτανε ασφαλές να πείτε ότι η μέτρηση σας είναι μέσα στη 1 μονάδα στο τελευταίο ψηφίο της μετρούμενης τιμής.



Στην από πάνω εικόνα, ας υποθέσουμε ότι μετράτε το μήκος της ράβδου. Εάν χρησιμοποιείτε το μέτρο μέτρησης που φαίνεται, τότε το μήκος του αντικειμένου θα είναι περίπου 86 mm, που σημαίνει ότι είσαστε σίγουροι ότι η πραγματική τιμή του μήκους είναι μεταξύ 85 mm και 87 mm. Συνεπώς, θα παραστήσετε τα δεδομένα μας ως:

$$L = 86 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$$

Στη περίπτωση αυτή, η αβεβαιότητα ή το σφάλμα σας είναι ± 1 mm. Ωστόσο, μπορεί να αισθάνεστε ότι είστε σε θέση να επιτύχετε μεγαλύτερη ακρίβεια από εκείνη της ελαχίστης υποδιαίρεσης του οργάνου. Τότε θα πρέπει να κάνετε κάποια εκτίμηση. Υποδιαιρώντας την ελαχίστη υποδιαίρεση ας πούμε σε 5 ή 10 νοερές υποδιαιρέσεις, μπορείτε να κάνετε καλύτερη εκτίμηση του μετρούμενου μήκους. Αυτό **λέγεται κανόνας** του 1/5 ή του 1/10. (Σε ορισμένες περιπτώσεις, θα δείτε ότι ο κανόνας αυτός είναι υπερβολικά γενναιόδωρος). Αν λοιπόν αισθάνεστε ότι μπορείτε να πάρετε μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέτρηση σας από αυτήν της ελαχίστης υποδιαίρεσης, τότε φυσικά θα ήταν πιο σκόπιμο να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα του 1/5 ή το 1/10. Μπορεί βέβαια η εμπιστοσύνη σας στο τελευταίο σημαντικό ψηφίο είναι μικρότερη, οπότε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το 1/2 της ελάχιστης υποδιαίρεσης του οργάνου. Εν πάση περιπτώσει, επαφίεται στη κρίση σας να εκτιμήσετε το σφάλμα. Σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει να μπορείτε να δικαιολογήσετε τις εκτιμήσεις σας στον επιβλέποντα! Τα ακόλουθα δεδομένα εκτιμήθηκαν με τον κανόνα του 1/2, του 1/5 και του 1/10, αντίστοιχα.

$$L = 85.5 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$$
$$L = 85.6 \text{ mm} \pm 0.2 \text{ mm}$$
$$L = 85.7 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$$

Και οι τέσσερις μετρήσεις του μήκους είναι σωστές, αλλά αντιπροσωπεύουν διαφορετικούς βαθμούς ακριβείας. Σε κάθε περίπτωση, η αβεβαιότητα ή το σφάλμα μειώθηκε, υποδηλώνοντας μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέτρηση. Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων στη καταγραφή δεδομένων, φανερώνει το μέτρο εμπιστοσύνης μας στα πειραματικά δεδομένα.

Για τους σκοπούς μας, είναι σημαντικό να θυμόσαστε δύο κανόνες που θα σας βοηθήσουν για να προσδιορίσετε την αβεβαιότητα σας σωστά:

- Κανόνας 1: Η αβεβαιότητα θα είναι της ίδιας ακρίβειας με της μετρούμενης τιμής.
- Κανόνας 2: Η μετρούμενη τιμή έχει τόσα σημαντικά ψηφία, όσα δικαιολογούνται από την πειραματική ακρίβεια.

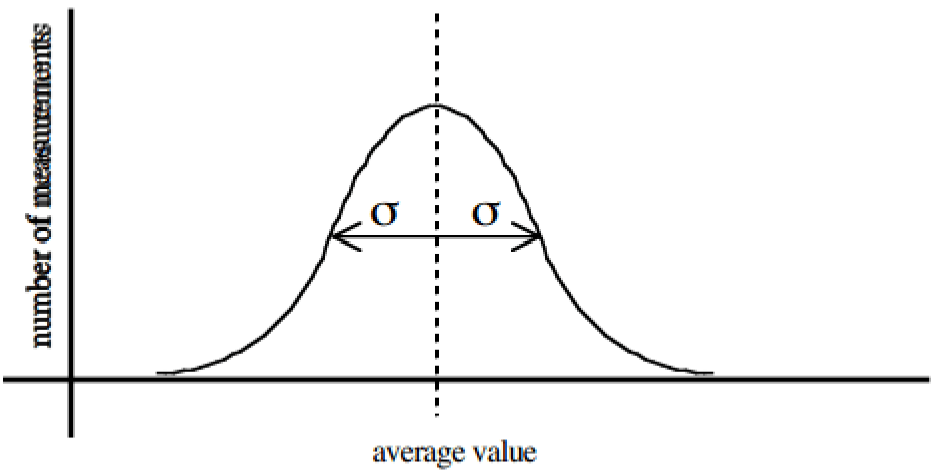
Σημείωση. Στη περίπτωση ψηφιακής συσκευής, η αβεβαιότητα είναι ίση με το μικρότερη ψηφιακή μονάδα, και καμία εκτίμηση δεν μπορεί να γίνει. Για παράδειγμα, η ανάγνωση του χρονομέτρου μπορεί να παρασταθεί μόνο ως $t = 12.63 \pm 0.01$ s.

• Τυχαία σφάλματα /Random Errors

Αναφέρουμε ένα άλλο παράδειγμα με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις της ίδιας ποσότητας ενός μεγέθους: εν προκειμένω, "το σημείο βρασμού του νερού". Έστω ότι 10 διαφορετικές φοιτητικές ομάδες μετρούν το σημείο βρασμού του νερού στο εργαστήριο και παρακάτω έχουν καταγραφεί οι μετρήσεις τους:

100.4 ˚C
101.1 ˚C
99.7 ˚C
100.0 ˚C
98.3 ˚C
99.5 ˚C
99.5 ˚C
101.1 ˚C
98.9 ˚C
100.5 ˚C

Ο μέσος όρος αυτών των ενδείξεων είναι 99.9 ˚C. Οι παραπάνω τιμές φαίνεται να είναι τυχαία διασκορπισμένες (randomly scattered) γύρω από τη μέση τιμή. Οι μετρήσεις αυτές φαίνεται να είναι αρκετά ακριβείς, αλλά υπάρχει κάποια ανεξήγητη ανακρίβεια, ίσως επειδή υπάρχει πρόβλημα στην εκτίμηση του τελευταίου ψηφίου, ή ίσως επειδή η ατμοσφαιρική πίεση τρεμοπαίζει, ή ίσως και να οφείλεται σε κάποιο άλλο ανεξήγητο λόγο. Αυτή η ανακρίβεια αποτυπώνει τις τυχαίες αποκλίσεις των επιμέρους μετρήσεων από τη μέση τιμή. Το σφάλμα που σχετίζεται με τις παραπάνω μετρήσεις αναφέρεται συνήθως ως τυχαίο σφάλμα.



Πολύ συχνά, τα τυχαία σφάλματα μπορούν να προσεγγιστούν από την συνάρτηση κατανομής του σφάλματος του Gauss. Αν έγιναν πολλές μετρήσεις της ίδιας πειραματικής μεταβλητής, τότε η πιο συχνή τιμή είναι η μέση τιμή ή πολύ κοντά σ' αυτήν (ελπίζοντας ότι αυτή θα είναι και η πραγματική τιμή). Η κατάσταση αυτή παριστάνεται γραφικά από την καμπύλη-καμπάνα του παραπάνω σχήματος.

Η απόσταση σ καλείται **τυπική απόκλιση** και έχει την εξής ερμηνεία: Μια τυχαία μέτρηση έχει πιθανότητα 68% να βρίσκεται μέσα στο εύρος μίας τυπικής απόκλισης γύρω από τη μέσης τιμή, αν τα σφάλματα μας είναι εντελώς τυχαία. Είναι κοινή πρακτική να υποθέτουμε, ελλείψει πληροφοριών για το αντίθετο, ότι τα σφάλματα είναι τυχαία. Είναι λογικό να αναρωτηθούμε "Πώς θα υπολογίζεται η σ;" Υπάρχουν δύο τρόποι: ο δύσκολος τρόπος και ο εύκολος τρόπος. Ο δύσκολος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσετε την ακόλουθο σχέση (ποικίλει):

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (1)$$

Στην (1), N είναι ο αριθμός των μετρήσεων και x είναι η μεταβλητή που μετράμε και η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$. Η τυπική απόκλιση για τα παραπάνω δεδομένα της θερμοκρασίας είναι 0,9 °C, συνεπώς θα αναφέρουμε το αποτέλεσμα μας για το σημείο βρασμού του νερού, ως εξής: 99.9 ± 0.9 °C.

- ## Το επί τοις εκατό σφάλμα /Percent Error

Συχνά μιλάμε για το επί τοις εκατό σφάλμα σε ένα πείραμα. Το % σφάλμα είναι συνήθως ο λόγος του τυπικού σφάλματος προς τη μέση τιμή, εκφρασμένη επί τοις εκατό. Στο παραπάνω παράδειγμα, αναφέρθηκε το αποτέλεσμα για τη μέτρηση του σημείου ζέσεως: 99,9 ± 0,9 ° C. Οπότε, το επί τοις εκατό σφάλμα θα είναι: $\frac{0.9°C}{99.9°C} = 0.009 = 0.9\%$

και θα ήταν εξίσου θεμιτό να αναφέρει κανείς το αποτέλεσμα, ως: $\theta = 99.9°C \pm 0.9\%$.

Διάδοση Σφάλματος/Error Propagation

Η διάδοσης σφάλματος είναι απλά η διαδικασία προσδιορισμού της αβεβαιότητας ενός αποτελέσματος που λαμβάνεται από έναν υπολογισμό. Κάθε φορά που μετρούνται δεδομένα, υπάρχει μια αβεβαιότητα **εγγενής ή συνδεδεμένη** με το εν λόγω αποτέλεσμα. Αν οι μετρήσεις αυτές, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό κάποιου μεγέθους, έχουν κάποια αβεβαιότητα συνδεδεμένη μ' αυτές, τότε φυσικά το τελικό αποτέλεσμα (του υπολογισμού σας) θα έχει να έχει και αυτό με τη σειρά του κάποιο επίπεδο αβεβαιότητας. Για παράδειγμα, στο εργαστήριο μπορεί να μετράς τη θέση ενός αντικειμένου σε διαφορετικούς χρόνους, με σκοπό να βρεις τη μέση ταχύτητα του αντικειμένου. Δεδομένου ότι και οι δύο μετρήσεις, απόστασης και χρόνου, έχουν αβεβαιότητες οι οποίες συνοδεύουν τους αριθμούς στους υπολογισμούς, είναι αναμενόμενο να επηρεάζουν το τελικό αποτέλεσμα για την ταχύτητα του αντικειμένου. Τίθεται επομένως το θέμα «πώς μπορεί κανείς να προσδιορίσει την αβεβαιότητα στις τιμές των μεγεθών που υπολογίζετε;»

Δεδομένου ότι οι υπολογισμοί αβεβαιότητας βασίζεται στη στατιστική, υπάρχουν επομένως τόσοι διαφορετικοί τρόποι προσδιορισμού της αβεβαιότητας όσες είναι οι στατιστικές μέθοδοι. Οι μέθοδοι διάδοσης του σφάλματος που παρουσιάζονται σε αυτόν τον οδηγό είναι ένα σύνολο γενικών κανόνων που θα πρέπει να χρησιμοποιούνται με συνέπεια για όλα τα επίπεδα της φυσικής (και όχι μόνο) σε αυτό το τμήμα.

Στα ακόλουθα παραδείγματα:

- q είναι το αποτέλεσμα μιας μαθηματικής πράξης
- δq είναι η αβεβαιότητα που συνδέεται με το αποτέλεσμα q
- δx είναι η αβεβαιότητα που συνδέεται με μια μέτρηση του μεγέθους x.
- Για παράδειγμα, μια μέτρηση της μάζας m έδωσε το αποτέλεσμα:
- m = 20.4 ±0.2 kg που σημαίνει δm = 0.2 kg

Σταθερές/Constants

Εάν μια έκφραση περιέχει μια σταθερή, B, έτσι ώστε το μέγεθος q ισούται με B επί x, τότε:

$$q = B \cdot x$$
$$\delta q = \pm B \cdot \delta x$$

ή ακόμη το σχετικό σφάλμα:

$$\frac{\delta q}{q} = \pm \frac{\delta x}{x}$$

Για παράδειγμα: αν F = mg, όπου m = 20.5 ±0.2 kg και g = 9.81 m/s^2, τότε

- *δF = ±g·δm, ή*
- *δF = ±9.81 m/s^2·0.2 kg = ±1.962 kgm/s^2 = ±2 Nt,*
- *F = 201 ± 2 Nt, και*
- *δF/F = ±δm/m = ±0.00976 = ±0.01 = ±1%*

Πρόσθεση και Αφαίρεση/Addition and Subtraction

Αν και από τη διαίσθηση μπορεί να φαίνεται λογικό να προσθέσετε τις αβεβαιότητες των προσθετέων, αυτό μπορεί να δώσει παραπλανητικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, αν ένας αριθμός A έχει μια θετική αβεβαιότητα και ένας άλλος B έχει αρνητική αβεβαιότητα, στη συνέχεια προσθέτοντας απλά τις δύο αβεβαιότητες θα μπορούσε να προκύψει η συνολική αβεβαιότητα να ισούται με μηδέν, που δεν στέκει. Ακόμη και προσθέταμε τις απόλυτες τιμές των δύο αβεβαιοτήτων δεν θα προέκυπτε η σωστή αβεβαιότητα! Για να διορθώσετε αυτά τα προβλήματα αθροίζουμε τα τετράγωνα των σφαλμάτων και στη συνέχεια παίρνουμε τη τετραγωνική του αθροίσματος. Εάν το q είναι το άθροισμα των χ, y και z, τότε η αβεβαιότητα που συνδέεται με το q μπορεί να υπολογιστεί από τη μαθηματική σχέση:

$$q = x \pm y \pm z \pm \ldots$$
$$\delta q = \pm\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 + \ldots}$$

Μπορείς να αποδείξεις σαν απλή αλγεβρική άσκηση ότι: $|\delta q| \le |\delta x| + |\delta y| + |\delta z| + \ldots$

▪ Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση / Multiplication and Division

Παρόμοια αναλογία ισχύει και για τον πολλαπλασιασμό και διαίρεση, όμως για τα κλασματικές αβεβαιότητες, δx/x, κλπ. Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα: Αν q=xyz, τότε

$$\frac{\delta q}{q} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y} + \frac{\delta z}{z} \qquad (1)$$

και για τους ίδιους λόγους όπως και παραπάνω

$$\frac{\delta q}{q} = \sqrt{(\frac{\delta x}{x})^2 + (\frac{\delta y}{y})^2 + (\frac{\delta z}{z})^2}$$

Μια απλοϊκή απόδειξη είναι η ακόλουθη: Αν q=xyz, και δq, δx, δy, δz, είναι τα αντίστοιχα σφάλματα που συνοδεύουν τις ποσότητες q, x, y, z, αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$q + \delta q = (x + \delta x)(y + \delta y)(z + \delta z) = xyz + yz\,\delta x + xz\,\delta y + xy\,\delta z + z\delta x\,\delta y + y\delta x\,\delta z + x\,\delta y\,\delta z + \delta x\,\delta y\,\delta z$

Αν παραλείψουμε τα γινόμενα των διπλών και τριπλών διαφορικών, ως πολύ μικρές ποσότητες, δηλ. $\delta x\,\delta y \approx \delta x\,\delta z \approx \delta y\,\delta z \approx \delta x\,\delta y\,\delta z \approx 0$, τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\delta q = yz\,\delta x + xz\,\delta y + xy\,\delta z\,,$$

και διαιρώντας και τα δύο μέλη με $q=xyz$, προκύπτει αμέσως η ζητούμενη σχέση (1).

Μπορείς να αποδείξεις σαν απλή αλγεβρική άσκηση ότι: $\left|\frac{\delta q}{q}\right| \le \left|\frac{\delta x}{x}\right| + \left|\frac{\delta y}{y}\right| + \left|\frac{\delta z}{z}\right| + \ldots$

▪ Εκθετική συνάρτηση/Exponents

Εάν το μέγεθος $q=x^n$, τότε η αβεβαιότητα που συνδέεται με το μέγεθος q υπολογίζεται ως εξής: Υπολογίζουμε το ολικό διαφορικό dq:

$$dq = \frac{dq}{dx}dx = nx^{n-1}dx = qn\frac{dx}{x}.$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα διαφορικά με τα αντίστοιχα σφάλματα $dx \to \delta x$ και $dq \to \delta q$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$\delta q = n\frac{\delta x}{x}q$ ή και $\frac{\delta q}{q} = n\frac{\delta x}{x}$

▪ Τριγωνομετρική συνάρτηση/Trigonometric Functions

Έστω ότι q ισούται με μια τριγωνομετρική συνάρτηση, π.χ. $q=sin\theta$, και θ είναι η μετρούμενη ποσότητα, π.χ. θ = 31° ± 0.5°. Η αβεβαιότητα που συνδέεται με το μέγεθος q, υπολογίζεται ως εξής: Υπολογίζουμε το ολικό διαφορικό dq:

$$dq = \frac{dq}{d\theta} d\theta = -\cos\theta \, d\theta$$

και στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα διαφορικά με τα αντίστοιχα σφάλματα $d\theta \rightarrow \delta\theta$ και $dq \rightarrow \delta q$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\delta q = \pm \cos\theta \, \delta\theta$$

Για την παραπάνω μετρηθείσα γωνία θ, το σφάλμα που συνδέεται με τη συνάρτηση q θα είναι:

$\delta q = \pm cos31 \cdot \dfrac{0.5\pi}{180} = \pm 0.00897 \approx \pm 0.009$, και τελικά $q=sin\theta=0.515\pm0.009$

Θα παρατηρήσατε ότι το σφάλμα της γωνίας $\delta\theta$ πρέπει να εκφράζεται πάντα σε rads!

- ## Σύνθετη συνάρτηση πολλών μεταβλητών /Multivariable functions

Ο γενικός κανόνας για σύνθετες συναρτήσεις είναι ο ακόλουθος:

Αν $q=f(x,y,z,..)$, τότε το σφάλμα που συνδέεται με την υπολογιζόμενη ποσότητα q δίδεται από τη σχέση:

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \delta z\right)^2}$$

όπου $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ είναι η μερική παράγωγος της συνάρτηση $f(x,y,z,\ldots)$ ως προς x, και κυκλικά ως προς τις άλλες μεταβλητές y, z,…κλπ